或る種の二階楕円型線型偏微分作用素の純虚数巾 (函数解析的方法による解析学研究会報告集)

藤原, 大輔

数理解析研究所講究録
59巻 1968年 1-7

或る種の二階楕円型線型偏微分作用素の純虚数巾

東大 理 藤原大輔

§1 問題

R^n内の有界領域Ωは滑らか（C^∞ class）な境界$\partial\Omega$をもつとする。二階楕円型偏微分作用素

$$A = \frac{-1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}(x)\sqrt{g(x)}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$$

を考える。ここで，$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$ はΩでの実な計量を与え，実vector $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$ に対し，$a_0 > 0$ があって，$x \in \Omega$ によらず

$$\sum_{ij} g_{ij}(x)\, \xi^i \xi^j \geq a_0 \sum_i \xi^{i2}$$

とする。境界条件 $Bu|_{\partial\Omega} = 0$ の下でAを考える。Bとしては，

$$Bu|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u\Big|_{\partial\Omega}$$

又は，$Bu = u$

をとる。ここで，$\partial/\partial\nu$ は$\partial\Omega$へのmetric ds^2に関する

法線微分，$\partial/\partial \tau_j$ は $\partial\Omega$ に接する微分とする。$Bu|_{\partial\Omega} = 0$ の下で $\mathcal{A}$ を考え，関数空間 $L^p(\Omega)$，$1 < p < \infty$，でこれを最小閉拡張し，これを A_B とする。（必要なら，十分大なる正数を $\mathcal{A}$ に加えると）$(A_B - \lambda)^{-1}$ は $\lambda \neq$ positive-real なら存在する。

$$(1.1) \qquad A_B^{\alpha} u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (-\lambda)^{\alpha} (\lambda + A_B)^{-1} u \, d\lambda$$

として，A_B^{α} を定義する。Γ は $-A_B$ の spectrum を囲む，複素積分路。（右辺が絶対収束する u につき $A_B^{\alpha} u$ を (1.1) で定義し，閉拡張して A_B^{α} を得る。）

$\alpha = \kappa i$，$\kappa \in \mathbb{R}$ のとき，$A_B^{\kappa i}$ は有界な作用素となるかどうか，が問題である。

§2. 結果

定理1　B が $\partial\Omega$ に接する微分を含まないならば，次の評価が成立する。$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists C_\varepsilon > 0$，

$$\| A_B^{\kappa i} \|_{L^p(\Omega)} \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon |\kappa|}$$

$A_B^{\kappa i}$ はこのとき完全連続でない。

B が $\partial\Omega$ に接する微分を含めば必しも $A_B^{\kappa i}$ は有界でない。

これから導かれる系を列挙する.

定理2　　B が $\partial\Omega$ に接する微分を含まぬと, $\{A_B^{\alpha}\}_{\alpha}$ は $\mathrm{Re}\,\alpha \leq 0$ で連続, $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ で α につき正則な連続作用素の半群を作り, 生成作用素は $\mathrm{Log}\,A_B$ 。

定理3　　$0 < \theta < 1$ のとき, A_B^{θ} の定義域を $D(A_B^{\theta})$ と書くと, B が $\partial\Omega$ に接する微分を含まぬなら,

$$D(A_B^{\theta}) = [L^p(\Omega), D(A_B)]_{\theta}$$

ここで, $[L^p(\Omega), D(A_B)]_{\theta}$ は $L^p(\Omega)$ と $D(A_B)$ の間の指数 θ の複素補間空間。

定理4

$Bu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + c(x)u$ 　のときは,

$$D(A_B^{\theta}) = \begin{cases} H^{p,2\theta}(\Omega) & , 0 < 2\theta < 2 - \frac{1}{p} \\ \{u \in H^{p,2\theta}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} + c(x)u|_{\partial\Omega} = 0\} & , 2 - \frac{1}{p} < 2\theta < 2 \end{cases}$$

$Bu = u$ 　のときは,

$$D(A_B^{\theta}) = \begin{cases} H^{p,2\theta}(\Omega) & , 0 < 2\theta < 1 - \frac{1}{p} \\ \{u \in H^{p,2\theta}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\} & , 1 - \frac{1}{p} < 2\theta < 2 \end{cases}$$

ここで, $H^{p,\sigma}(\Omega)$ とは, $H^{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ の Ω への制限であり, $H^{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ とは, $(I-\Delta)^{-\frac{\sigma}{2}}$ による $L^p(\mathbb{R}^n)$ の像。

注意 $p\neq 2$ のとき，$L^p(\Omega)$ と $D(A_B)$ との間の実補間空間と補間空間は異なることに注意されたい。過去において，作用素の分数巾の定義域を定める試みは，実補間空間として捉えようとしていたと思われる。(J. L. Lions [1], H. Komatsu [2], P. Grisvard [3], [4], N. Shimakura [7], D. Fujiwara [5])

以上の結果を高階の作用素に拡張することはまだ出来ない。

§3. 定理1の証明の大略

$x_0\in\partial\Omega$ を中心として，normal coordinate を選んで次のようにできる：x_0 での Ω の cotangent space $T^*_{x_0}(\Omega)$ を $\partial\Omega$ の cotangent space $T^*_{x_0}(\partial\Omega)$ と conormal space $\mathcal{N}$ に直交分解して，それに応じて $\xi\in T^*_{x_0}(\Omega)$ を

$$\xi=(\xi',\xi_n)\qquad \xi'=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1})$$

とする。A の主シンボルは

$$|\xi|^2=|\xi'|^2+\xi_n^2$$

に出来る。$\pm i(|\xi|^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}=\tau^{\pm}$ とおく。ここで $1^{\frac{1}{2}}=1$。従って $\mathrm{Im}\,\tau^+>0$ (σ real のとき)。pseudo-differential operator の一種 (昨年 β-pseudo-differential operator として紹介した) を使って A_B の Green 作用素を構成してみると，$A_B^{\kappa z}u$ の最も特異な部分は，次の二項の積分の和で計

ることが出来ることが知れる。

$$(3.1)\quad I_1 = \int_\Gamma (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^n} (|\xi|^2+\sigma^2)^{-1} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi,$$

$$I_2 = \int_\Gamma (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi'} d\xi' \int_\gamma e^{ix_n\cdot\xi_n} \frac{(\xi_n + i(|\xi'|^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}})}{(\xi^2 + \sigma^2)} d\xi_n$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^1} \frac{\hat{u}(\xi',\eta)}{|\xi'|^2+\eta^2+\sigma^2} d\eta.$$

ここで γ は τ^+ を囲み Imaginary part が >0 なる半平面内の閉曲線。 u は $\mathbf{R}^n$ の L^p 空間の元で，$x_n<0$ で 0 なるものとする。 第二項を扱うと，γ 上で積分実行して，

$$I_2 = (2\pi i)\int_\Gamma (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi'} d\xi' \int_{\mathbf{R}^1} \frac{e^{ix_n\cdot\tau^+}\hat{u}(\xi',\eta)}{|\xi'|^2+\eta^2+\sigma^2} d\eta$$

$\tau^+=\mu$ を積分変数にとって積分路を変更すると，

$$I_2 = (2\pi i)\int_{\Gamma'} (|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i} 2\mu d\mu \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i(x_n\cdot\mu + x'\cdot\xi')} d\xi' \int_{\mathbf{R}^1} \frac{\hat{u}(\xi',\eta)}{\eta^2-\mu^2} d\eta$$

ここで Γ' は $\mathrm{Im}\,\mu = \mathrm{const} > 0$ なる曲線を右から左へ。

$\hat{u}(\xi',\eta)$ は $\mathrm{Im}\,\eta \leq 0$ で一様有界，$\mathrm{Im}\,\eta<0$ で正則。 よって，

$$(3.2)\quad I_2 = (2\pi i)^2 \int_{\Gamma'}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i} \hat{u}(\xi',-\mu) e^{i(x'\cdot\xi' + x_n\cdot\mu)} d\xi' d\mu$$

$$= (2\pi i)^2 \int_{\mathbf{R}^n} (|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i} \hat{u}(\xi',-\mu) e^{i(x'\cdot\xi' + x_n\cdot\mu)} d\xi' d\mu.$$

$(|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i}$ は (ξ',μ) の κi 次同次 C^∞-関数であることを考慮して，Mikhlin の定理を拡張して適要すれば，（あるいは Seeley の定理？）

$$\| I_2 \|_{L^p} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\kappa|} \| u \|_{L^p}$$

なる評価を得る．(3.1) と (3.2) 式を見比べれば，I_1 も同じ評価が可能のことが分る．

残余の項については，Critical ではないが，長い厄介な計算を必要とする．

定理２の証明は省略する。 定理３は補間空間の一般論と定理１からの帰結。 定理４は筆者の論文[6]を参照されたい． なお以上の結果は東京大学理学部紀要に投稿中である。

文　献　表

[1] J.L. Lions, Espaces d'interpolations et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962) 233-241.

[2] H. Komatsu, Fractional powers of operaters II, Interpolation spaces, Pacific Jour. Math. 21(1967) 89-111.

[3] P. Grisvard, Caracterisation de quelques espaces d'interpolations, Arch. rat. mech. anal. 25 No.1 1967.

[4] __________, Commutativité de deux foncteurs d'interpolations et applications. J. Math. Pures et Appl., 45 (1966) 143-290.

[5] D. Fujiwara, Concrete characterisation of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc. Japan Acad. 43 1967.

[6] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space. To appear in J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo.

[7] N. Shimakura, Sur les domaines des puissances fractionnaires d'opérateurs, Seminaire de Schwartz et Lions.